3. Bodendrucktendenzgleichung

$$\omega(p) = \omega\left(p_\mathrm{s}\right) - \int_{p_\mathrm{s}}^{p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p \mathrm{d}p$$

mit $p \rightarrow 0$ (Oberrand der Atmosphäre, top-of-atmosphere, ToA)

p_s Bodendruck, ω (p=0) = 0 (kein Austausch mit Universum)

$$\omega\left(p_\mathrm{s}\right) = -\int_0^{p_\mathrm{s}} \nabla \cdot \vec{V}\ \mathrm{d}p \qquad \text{mit} \quad \omega\left(p_\mathrm{s}\right) = \frac{\partial p_\mathrm{s}}{\partial t} + \vec{V}_\mathrm{a} \cdot \nabla p_\mathrm{s} - g\rho w_\mathrm{s}$$

und den Approximationen: $V_a \approx 0$ (vgl. Skalenanalyse); $w_s \approx 0$ (ebener Boden)

$$\frac{\partial p_\mathrm{s}}{\partial t} \approx -\int_0^{p_\mathrm{s}} \nabla \cdot \vec{V}\ \mathrm{d}p$$

Bodendruckänderung durch Massenkonvergenz (-divergenz) in die Säule über dem Punkt ($\Leftrightarrow$ hydrostatische Approximation) [NB: kein Einfluss der Temperatur!].

Problem: $\nabla \cdot \vec{V}$ aus ageostrophischer Komponente; außerdem: Oft Kompensation von Konvergenz in unterer vs. Divergenz in oberer Troposphäre (oder umgekehrt).

→ Bodendrucktendenzgleichung aus Kontinuitätsgleichung abgeleitete prognostische Gleichung!

XI Thermischer Wind

Betrachte einen horizontalen Temperaturgradienten.

hypsometrische Gleichung (geopotentielle Höhe $Z = \Phi(z) / g_0$):

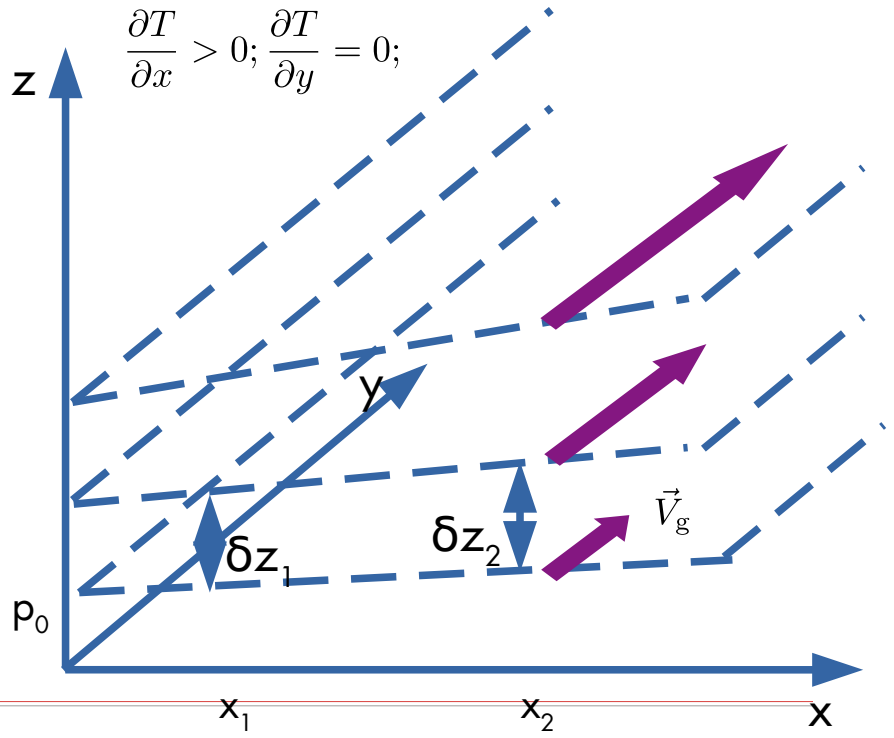
$$g\Delta Z = RT\Delta \ln p$$

$$\Delta Z = \frac{R}{g} T \ \Delta \ln p$$

Schichtdicke proportional zur Temperatur
Geostrophischer Wind:

$$v_g = \frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\bigg|_p$$

$$u_g = -\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\bigg|_p$$



Änderung des Geopotentials mit dem Druck aus hydrostatischer Gleichung, umgeformt mit Zustandsgleichung idealer Gase:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p}$$

Änderung des geostrophischen Winds mit dem Druck (auf Isobarenfläche):

$$\frac{\partial v_\mathrm{g}}{\partial p} = \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial x} = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{R\,T}{p}\right) = -\frac{R}{f}\,\frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_\mathrm{g}}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f}\,\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_p$$

$$\frac{\partial u_\mathrm{g}}{\partial \ln p} = \frac{R}{f}\,\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_p$$

ebenso herzuleiten

$$\frac{\partial \vec{V}_\mathrm{g}}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f}\vec{k} \times \nabla_p T$$

Gleichung für den thermischen Wind in Vektornotation

[bzw. vielmehr: Gleichung für thermische Windscherung]

Thermischer Wind also: Änderung des geostrophischen Winds mit der Höhe bei Vorhandensein eines horizontalen Temperaturgradienten.

Integral über eine Schicht von p_0 bis p_1:

$$\frac{\partial \vec{V}_\mathrm{g}}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f}\vec{k} \times \nabla_p T \quad | \quad \int_{p_0}^{p_1} \mathrm{d} \ln p$$

$$\vec{V}_T \equiv \vec{V}_\mathrm{g}\left(p_1\right) - \vec{V}_\mathrm{g}\left(p_0\right) = -\frac{R}{f}\int_{p_0}^{p_1} \left(\vec{k} \times \nabla_p T\right) \mathrm{d} \ln p$$

mit Schichtmitteltemperatur <*T*> zwischen Druckniveaus p_0 und p_1, $< T >= \frac{\int_{p_0}^{p_1} T \mathrm{d} \ln p}{\int_{p_0}^{p_1} \mathrm{d} \ln p} = \frac{\int_{p_0}^{p_1} T \mathrm{d} \ln p}{\ln \frac{p_1}{p_0}}$

$$\vec{V}_T = -\frac{R}{f}\vec{k} \times \nabla_p \int_{p_0}^{p_1} T \mathrm{d} \ln p = -\frac{R}{f}\vec{k} \times \nabla_p < T > \ln \frac{p_1}{p_0} = +\frac{R}{f}\vec{k} \times \nabla_p < T > \ln \frac{p_0}{p_1}$$

thermischer Wind in Komponenten: $u_T = -\frac{R}{f}\left.\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y}\right|_p \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$ und $v_T = \frac{R}{f}\left.\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x}\right|_p \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$

Aus hydrostatischer Gleichung in Druckkoordinaten: $\mathrm{d}\Phi = -\frac{R\,T}{p}\,\mathrm{d}p$

$$\Phi_1 - \Phi_0 = -R\int_{p_0}^{p_1} T \mathrm{d} \ln p = -R\langle T \rangle \ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$$

$$\langle T \rangle \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{R}$$

Damit Thermischer Wind mit Geopotential geschrieben:

$$u_T = -\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi_1 - \Phi_0\right)$$

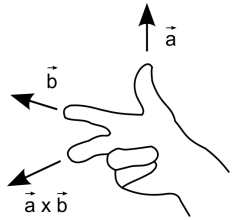
$$v_T = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_1 - \Phi_0\right)$$

Mit Schichtdicke Z_T: $Z_T = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{g} = \frac{R}{g}\langle T\rangle \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$

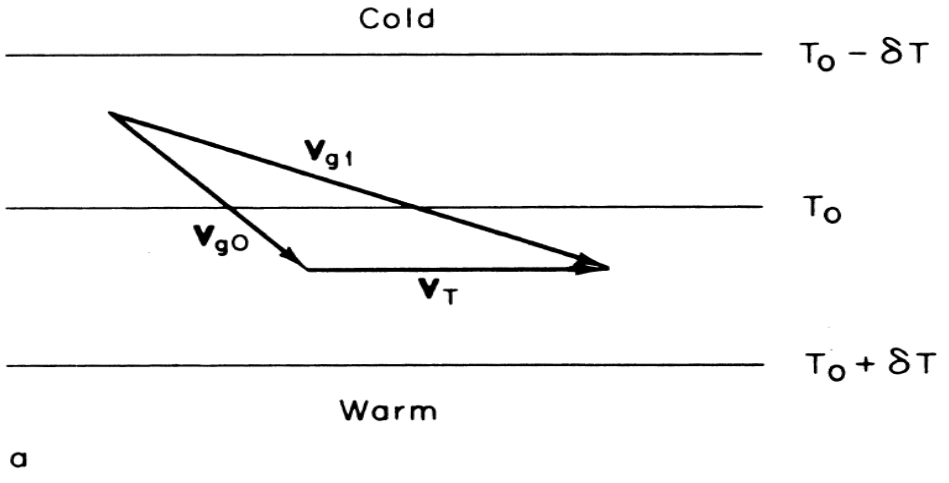
Isolinien gleicher Schichtdicke parallel zu Isolinien gleicher Schichtmitteltemperatur.

$$\vec{V}_T = \frac{1}{f}\vec{k} \times \nabla\left(\Phi_1 - \Phi_0\right) = \frac{g}{f}\vec{k} \times \nabla Z_T = \frac{R}{f}\vec{k} \times \nabla\langle T\rangle \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

→ Thermischer Wind parallel zu Isothermen der Schichtmitteltemperatur [mit warmer Luft recl

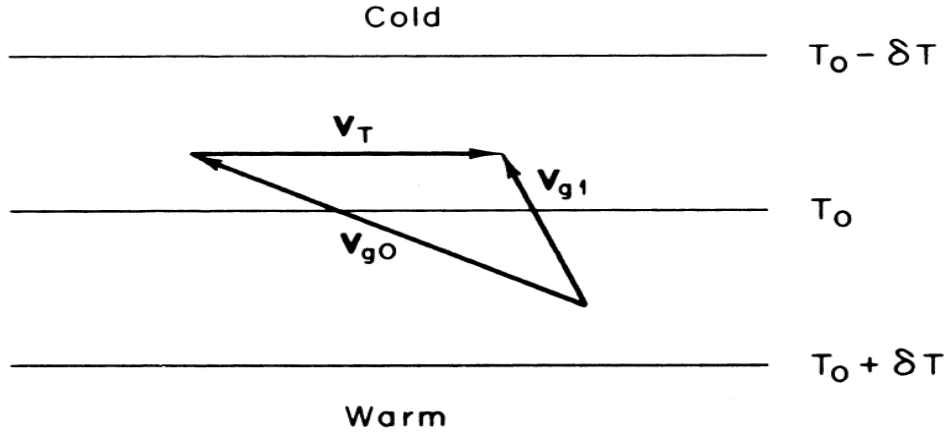


Geostrophischer Wind dreht entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Höhe (nach links)
→ Kaltluftadvektion.



a

Geostrophischer Wind dreht im Uhrzeigersinn mit der Höhe (nach rechts)
→ Warmluftadvektion.



Barotrope und barokline Schichtung

barotrop: Dichte ist Funktion nur des Druckes (Dichte konstant auf Druckflächen)

$\rho = \rho(p)$

Damit auch: Temperatur Funktion nur des Druckes (Temperatur konstant auf Druckflächen); folgt aus Zustandsgleichung idealer Gase

$\nabla_p T = 0$

Gleichung für thermischen Wind: $\partial \vec{V}_g / \partial \ln p = \vec{0}$

⇨ geostrophischer Wind höhenunabhängig

baroklin: Dichte Funktion des Druckes und der Temperatur: $\rho = \rho(p,T)$

∃ Temperaturgradient auf Druckflächen

→ thermischer Wind